

INVERSE PROBLEMS

Ilkka Niiniluoto

Luennot abduktiivisesta päättelystä,
toukokuu 2014

ANALYSIS AND SYNTHESIS

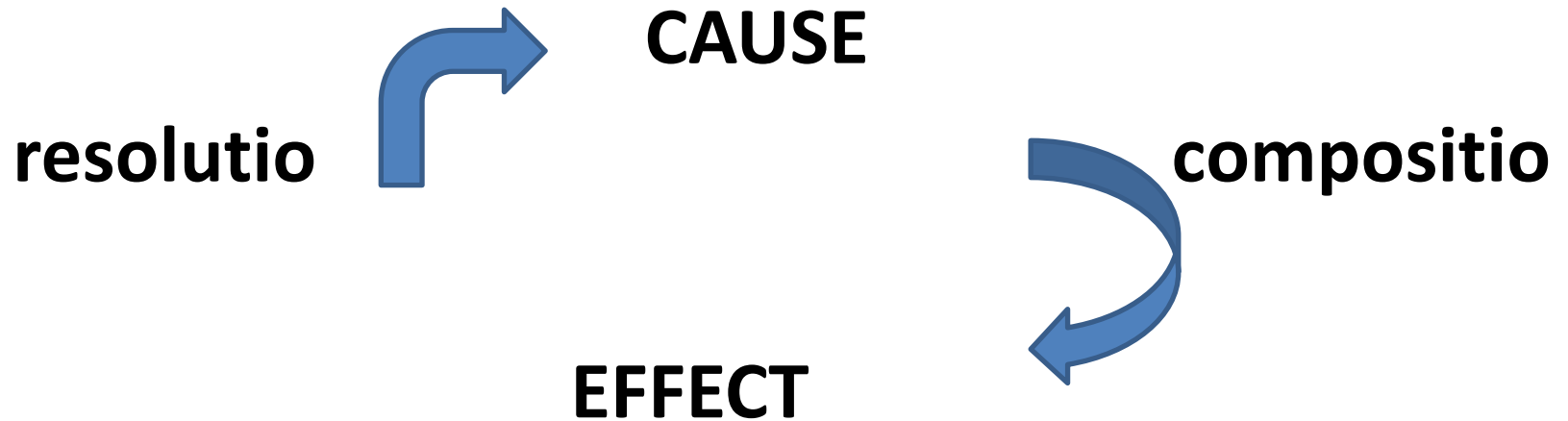
- Greek geometry:
 - theoretical: discovery of proofs
 - problematic: discovery of constructions
- analysis: backward reasoning from theorems to axioms or from solutions to conditions
- synthesis: proof or construction

- EUCLID, PAPPUS c. 320 AD (in Latin 1566)
- DESCARTES: analytic geometry

RESOLUTIO & COMPOSITIO

- medieval interpretation of ARISTOTLE
 - GROSSETESTE
- ZABARELLA's regressive method, GALILEO, NEWTON, MARX
- *resolutio*: from effect to causes, from knowing that to knowing why, from facts to their explanations
- *compositio*: from causes to effects, from explanatory theories to explained facts

REGRESSIVE METHOD



LINEAARISET PROBLEEMAT

$$y = ax + b \quad \text{suora}$$

a and b known,

given x , calculate $y = ax + b$

given y , calculate $x = (y - b)/a$

a and b unknown, given two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) , calculate a and b

YLEISET PROBLEEMAT

- matemaattinen malli $y = f(\underline{x}, \underline{a})$

output variable y depends by function f on input variables $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and parameters $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$

-FORWARD PROBLEM: given \underline{a} , from \underline{x} calculate y

-INVERSE PROBLEM: given \underline{a} , from y calculate \underline{x}

-ESTIMATION PROBLEM: given values of \underline{x} and y , identify \underline{a}

LSD

- given n points, choose \underline{a} so as to minimize the least square distance

$$\sum (y_i - f(x_i, \underline{a}))^2$$

- regression analysis
- factor analysis

- inference to the best approximate explanation (SCHURZ)

PROBABLE PROBLEMS

- mathematical model $y = f(\underline{x}, \underline{a}) + \varepsilon$

where ε is a random variable with a known probability distribution P

- PROBABLE PREDICTIONS: $P(y/\underline{x}, \underline{a})$
- INVERSE RETRODUCTIONS: $P(\underline{x}/y, \underline{a})$

POSTDICTION

- HEMPEL: DN-malli selittämislle
 - lait ja alkuehdot (*explanans*), näistä johdetaan selitettävää tosiseikkaa tai tapahtumaa koskeva lause (*explanandum*)
 - ennustamisella (*prediction*) sama rakenne, johdettavaa tapahtumaa ei tunneta etukäteen
 - jäljittäminen (*postdiction*) 1958, samanlainen päättely taaksepäin, historialliset tieteet
 - ei viittausta PEIRCEN abduktioon tai retroduktioon

DYNAAMISET SYSTEEMIT

- discrete state system S
- hetkellä t jossain tiloista s_1, \dots, s_k
- lainomaiset siirtymät tilasta toiseen: seuraava tila riippuu vain edellisestä (Markov-ehto)
- *eteenpäin deterministinen*: tila hetkellä t määrää yksikäsitteisesti tilan hetkellä $t+1$
 - D-ennustukset
- *historiallisesti deterministinen*: tila hetkellä t määrää yksikäsitteisesti tilan hetkellä $t-1$
 - D-retroduktiot
- erikoistapaus: lait ajallisesti käännettävissä (LAPLACE)

PROBABILISTISET TILASYSTEEMIT

- RESCHER: *PS* (1963), *Scientific Explanation* (1970)
- STEGMÜLLER: *Wissenschaftliche Erklärung und Begründung* (1969)
 - ei viittausta PEIRCEN retroduktioon
 - siirtymätodennäköisyydet $P(s_j/s_i)$ syistä vaikutuksiin
 - käänteiset todennäköisyydet vaikutuksista syihin
Bayesin kaavan avulla
 - P-retroduktiot, heikko ja vahva

TULOKSIA

- D-retroduktio saattaa olla mahdoton eteenpäin deterministisessä systeemissä



$s_1 \rightarrow s_2 \quad s_3$



- D-retroduktio voi olla mahdollinen äärettömässä probabilistisessa systeemissä

KAOOTTISET SYSTEEMIT

- ääretön tilajoukko (*state space, phase space*)
- tilastollisen mekaniikan ergodiset systeemit
- *stabiilisuus*: tuleva tila riippuu alkutilasta jatkuvan funktion kautta
- *kaaos*: deterministiset systeemit voivat olla epästabiileja, mielivaltaisen lähellä olevat tilat vievät eri tuloksiin (rahanheitto)
- epälineaariset systeemit, *ill-posed* inverse problems (HADAMARD), kaoottisuus taaksepäin, alkutilasta tarvittaisiin äärettömän tarkka määrittäminen
- likimääräiset probabilistiset algoritmiset ratkaisut

VIITTAUS

- IN, "Abduction, Tomography, and Other Inverse Problems", *Studies in History and Philosophy of Science* 42 (2011).

JOHANN RADON (1887-1956)

- Professor of Mathematics at the University of Vienna
- inversion formula: "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten" (1917)
- applications in the 1960s
- HOUNSFIELD & CORMACK: Nobel prize of medicine for computerized tomography 1979
 - detecting cancer tumors in diagnostic medicine
- NATTERER: *The Mathematics of Computerized Tomography* (2001)

INVERSE PROBLEMS

- menestyksellinen erikoisala sovellutussa matematiikassa, inspiraatio Radonin teoreemasta ja sen yleistyksistä
- journals:
 - *Inverse Problems* 1985
 - *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*
 - *Inverse Problems in Science and Engineering*
- HY:n huippuyksikkö: LASSI PÄIVÄRINTA

ILLUSTRATION

1	2	3	6
2	3	4	9
3	4	5	12
6	9	12	

- FORWARD: count red marginal sums for rows and columns
- INVERSE: calculate black numbers in the squares from the marginal sums
 - many solutions
 - add three diagonals: nine equations, nine unknowns, unique solution (if any) by matrix algebra

RADON'S THEOREM

- $n \times n$ square real plane \mathbb{R}^2
 - numbers function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 - diagonal line in \mathbb{R}^2
 - sum integral
-
- line integral of f over line L $R(f,L) = \int f(z) dz$
 - INVERSION FORMULA: for sufficiently smooth functions f , the values of f can be calculated if its line integrals $R(f,L)$ over all lines L are known
 - MADER 1927: \mathbb{R}^n , for $n \geq 2$
 - approximate and probabilistic solutions when only some line integrals are known

TOMOGRAPHY

- a body B with density $f(z)$ at point z in R^2
- X-ray goes through B along line L, its loss of intensity I at z is a linear function of $f(z)$

$$\Delta I/I = f(z)\Delta z$$

I_0 input intensity, I_1 output intensity

$$I_1 = I_0 e^{-R(f,L)}$$

$$R(f,L) = \ln(I_0/I_1)$$

- measure I_0 and I_1 for lines L, put all of these values into Radon's formula, and thereby calculate the density $f(z)$ of B at z
- build a computer image of B
- in practice, different scanning systems (parallel, fan-beam)

SIRONTA

- asteroidien muoto voidaan laskea, kun tiedetään, miten eri suunnista tulevat valonsäteet taipuvat sen pinnassa
- vrt. HUSSERL: havainnon fenomenologia
- vrt. PICASSO, BRAQUE: kubismi, samaan maalaukseen kohde eri suunnista havaittuna

JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

- käännteisten ongelmien menestys sovelletussa matematiikassa, ja niiden sovellutukset monien tieteiden piirissä, vahvistaa PEIRCEN näkemystä abduktion merkityksestä
- käännteiset ongelmat ideaalisessa muodossaan ovat abduktion rajatapauksia (yksikäsitteinen ratkaisu taaksepäin), päättely vaikutuksista syihin
- käytännössä päättelyt likimääräisiä ja probabilistisia
- medikaalinen kuvantaminen palvelee sekä keksimistä (kasvainten tunnistaminen) että oikeuttamista (luotettava kuvaus kasvainten geometrisesta muodosta ja tiheydestä)

ABDUKTIO JA HISTORIA

- PEIRCE: oletus Napoleonin historiallisesta olemassaolosta selittää Napoleoniin liittyvät nykyiset dokumentit ja muistomerkit
- erehdyksen mahdollisuudet
 - oliko Piispa Henrik todella olemassa (TUOMAS HEIKKILÄ)
 - nykyisten fiktiivisten tarinoiden jäljet vuosisatojen kuluttua
 - lähdekritiikki historiantutkimuksessa
- kausaalisuus historiassa
 - POPPER: ”historismin kurjuus”, ei yleisiä lakeja historiassa, ei evoluution lakeja, silti elämän kehitys on tulosta lakien ja säännönmukaisuuksien yhteisvaikutuksesta

THE IDEA OF EVOLUTION

- LINNÉ's taxonomy of flora & fauna (1751)
 - God created all the species in the beginning
- LAMARCK, SPENCER: directed evolution
- CUVIER: fossils as remains of extinct species
- palaeontology
 - Homo Neanderthalensis 1856
- DARWIN: *The Origin of Species* (1859)
 - gradual evolution by random variation and natural selection
 - explanatory power without predictive power
- HUXLEY: *Man's Place in Nature* (1863)
- DARWIN: *The Descent of Man* (1871)

EVOLUUTION VAIHEITA

ks. I. HANSKI et al. (toim.), *Kaikki evoluutiosta* (2009)

- kosminen evoluutio
 - Big Bang 13,7 miljardia vuotta, kosminen inflaatio, aine ja energia, galaksien synty, tähden elinkaari
- biologinen evoluutio
 - elämän synty maapallolla 3,5 miljardia vuotta, lajien kehitys, geenit ja DNA, mutaatiot ja luonnonvalinta
- kulttuurievoluutio
 - ihmisen luoman kulttuurin välittyminen, jäljittely, itsetietoisuus, puhuttu kieli, kirjoitettu kieli ja historiallinen aika

THE TREE OF LIFE

- the history of life on earth can be represented by a tree with a common descent and branches corresponding to speciation
 - missing links
 - gradualism vs. saltationism
- evolution is a process which goes forward in time, the reconstruction of the evolutionary trees from present evidence (contemporary forms of life + fossil records) is backward inference or an abductive task in Peirce's sense

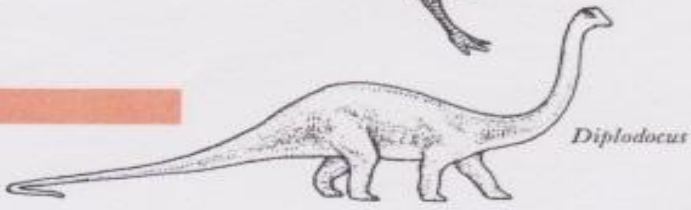
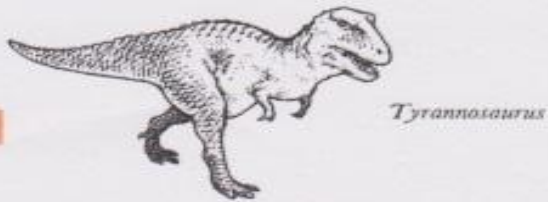
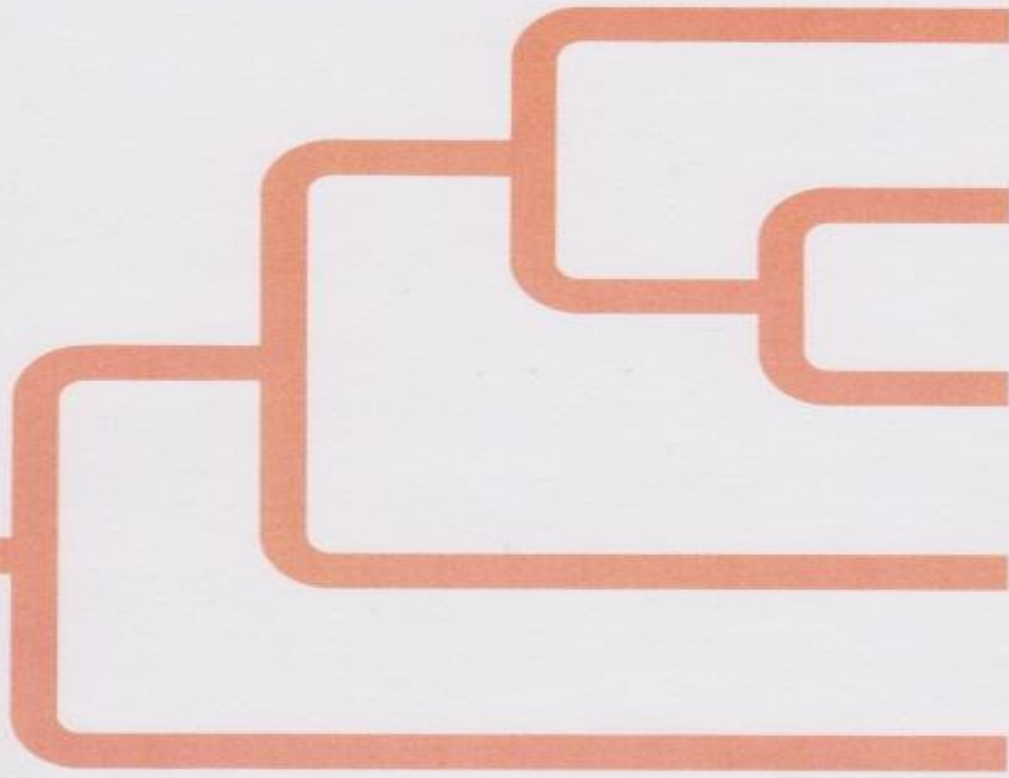
CLADISTICS

- measure the similarity or distance of species by their common traits or characters
 - phenotype, genotype
- construct a tree or dendrogram so that more similar species have more recent common ancestors
 - convergence: accidental similarity in different phyletic lines

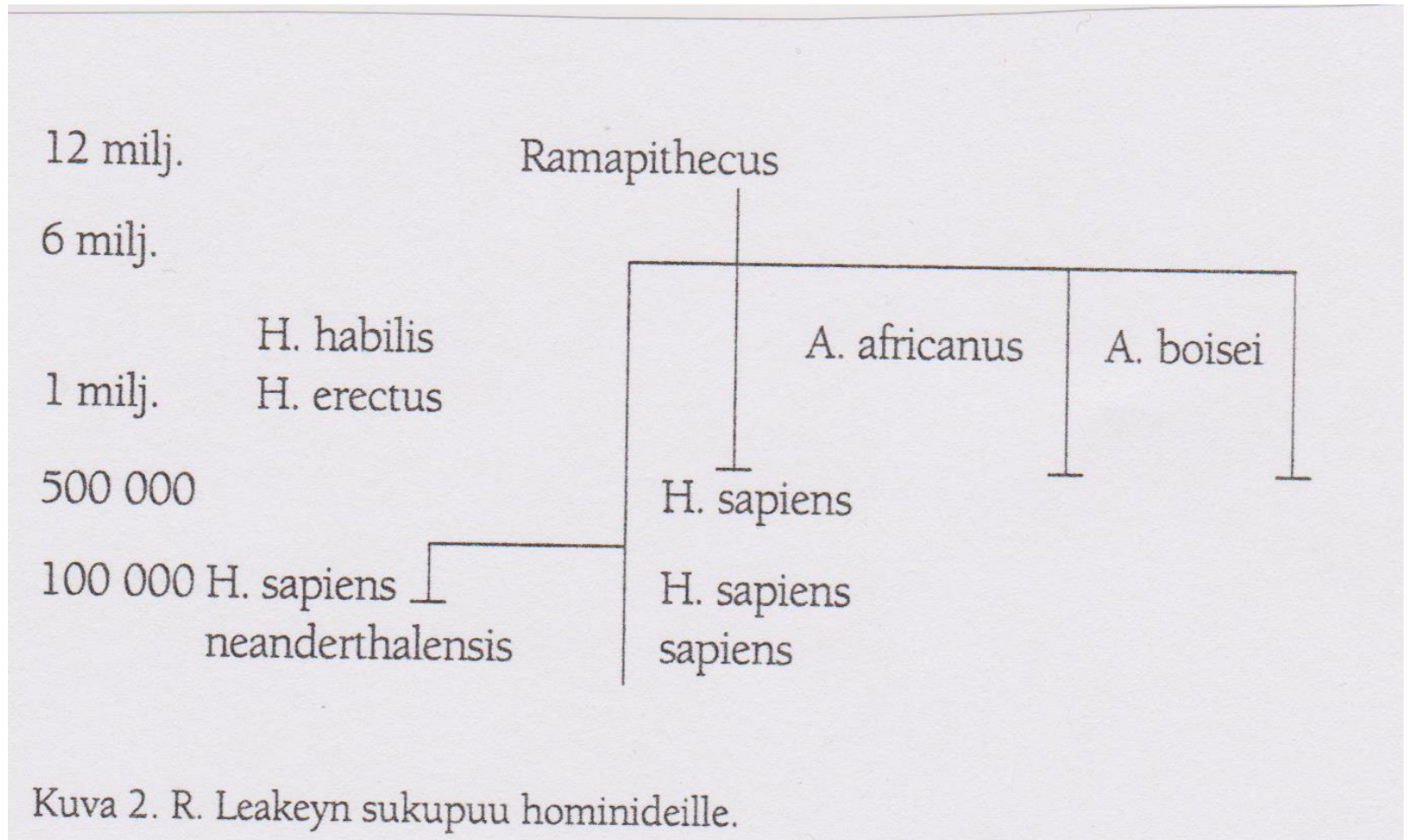
Cladogram of saurischian dinosaurs and birds.

Do you agree that this is how these saurischian dinosaurs are related to each other and to birds?

How likely do you think it is that birds are the closest living relatives of the dinosaurs?

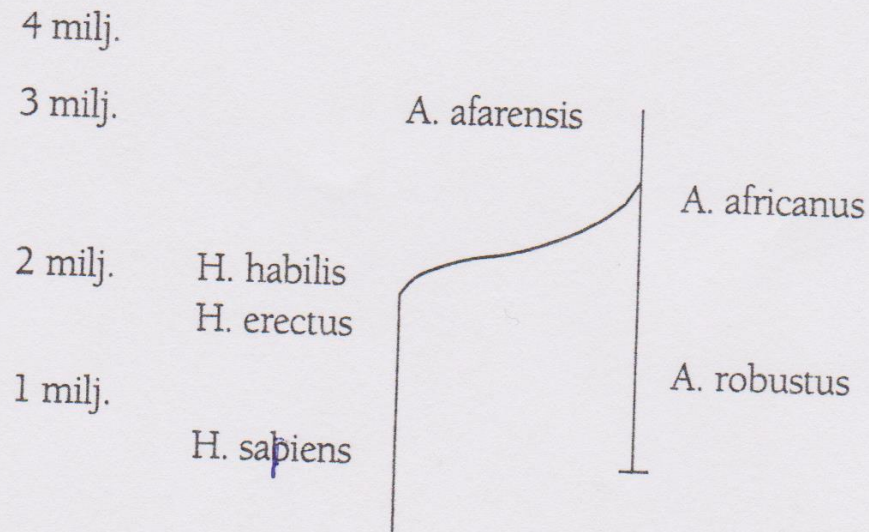


HOMINIDIT (LEAKEY)



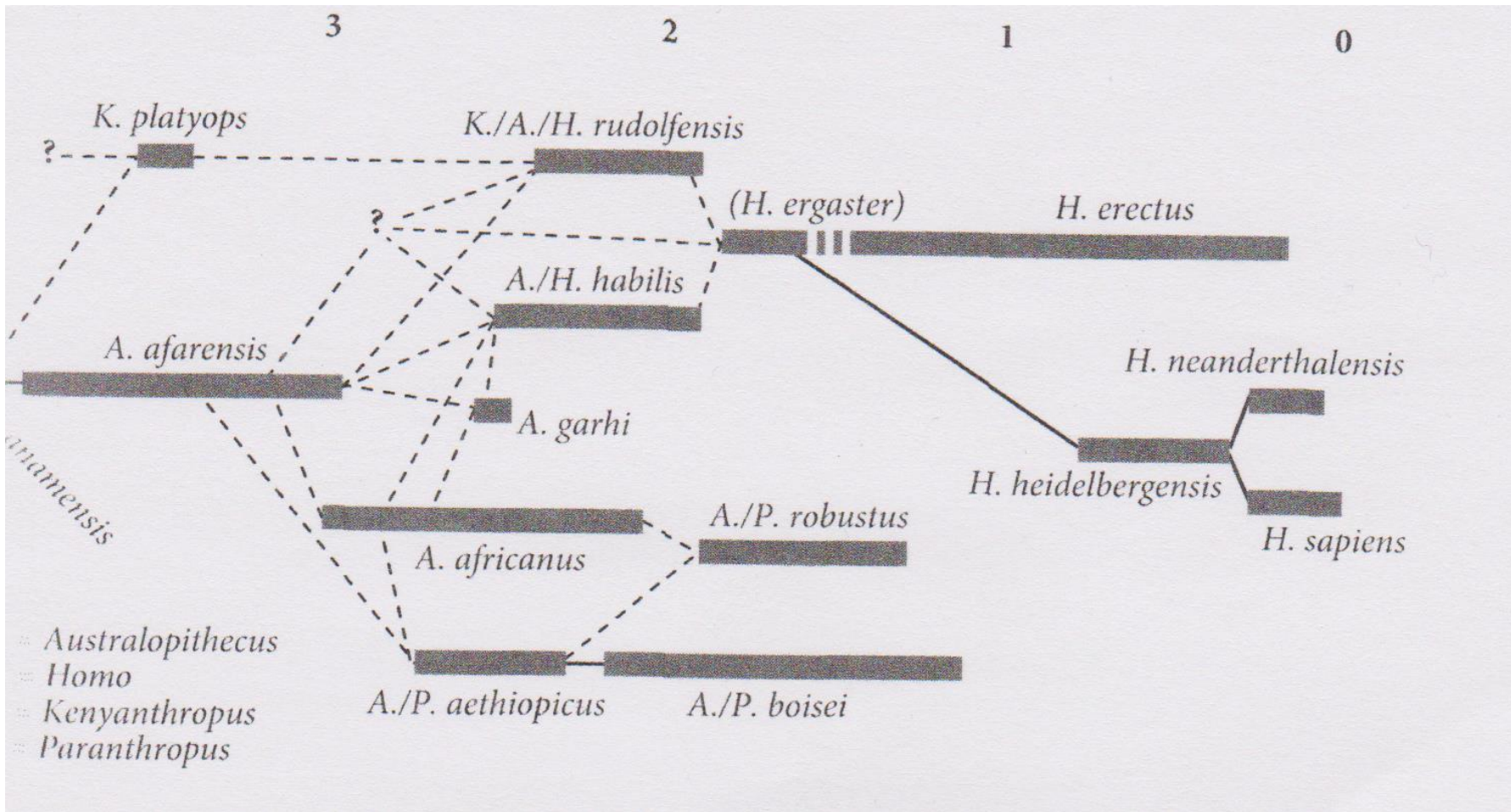
Kuva 2. R. Leakeyn sukupuu hominideille.

HOMINIDIT (JOHANSON)



Kuva 3. Johansonin sukupuu hominideille.

HOMINIDIT (Ylikoski&Kokkonen)



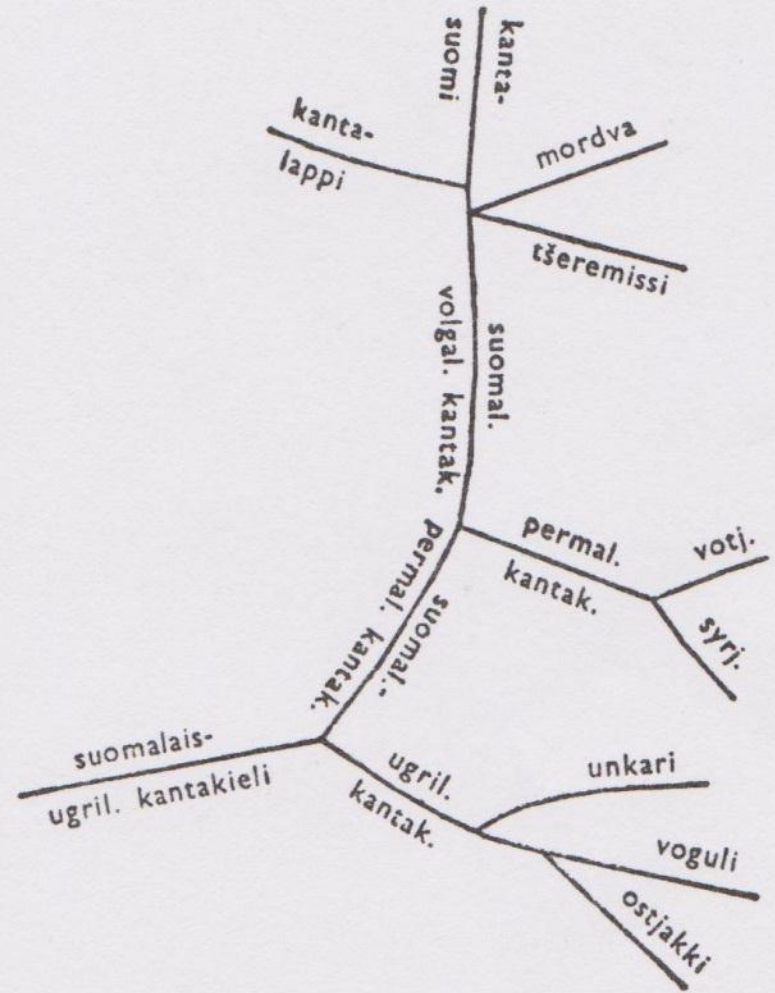
EVOLUTIONISMI IHMISTIETEISSÄ

- evoluution idean soveltaminen humanistisissa tieteissä 1860-luvulta lähtien
 - SCHLEICHER: filologia
 - BASTIAN: etnologia
 - TYLOR, MORGAN: antropologia
 - SUNDT: teknologia
 - KROHN: folkloristiikka
 - WESTERMARCK: moraali

KIELEN EVOLUUTIO

- kielellä (kieliperheellä) on alkuperäinen kantamuoto
 - suomalais-urgilainen kantakieli
- kielen kehitystä voidaan kuvata puun avulla
- oletus: kielen kehitys kohti yksinkertaisempia muotoja
 - kulttuurikontaktit, kielilainat

KIELIPUU



SUOMALAINEN MENETELMÄ

- tekstikritiikki
 - muutokset ja virheet välittyneissä kopioissa
- JULIUS KROHN: tekstikritiikki folkloristiikassa 1870-luvulla
 - tekstit oraalisessa ja kirjallisessa traditiossa
- KAARLE KROHN: *Die folkloristische Arbeitsmethode* (1926)
- retroduktio: systemaattiset vertailut olemassaolevien tekstin versioiden välillä (käsikirjoitus, runo, tarina, sananlasku, vitsi), rekonstruoi alkuperäinen muoto ja sen polveutumista kuvaava stemma
- samankaltaisuus biologisen taksonomian kladistiikan kanssa

ESIMERKKI

AAA

BAA

ABA

AAB

BBA BAB

BBA [ABB]

BAB [ABB]

BBB BBB

BBB BBB

BBB BBB

STEMMATOLOGIA

- ROBINSON and O'HARA: computer methods in stemmatology 1991
 - software package PAUP, designed for phylogenetic analysis
- TUOMAS HEIKKILÄ and TEEMU ROOS in Helsinki (2006)
 - Death Psalm of Bishop Henry
 - data sets: Heinrich
 - RHM method: distances between stemmata